

# Συστηματικός Υπολογισμός Καμπυλοτήτων Διαρροής και Αστοχίας Διατομών από Οπλισμένο Σκυρόδεμα

Απόστολος Κωνσταντινίδης<sup>1</sup>, Γιάννης Μπέλλος<sup>2</sup>

## ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η παρούσα εργασία εξετάζει και επιλύει το πρόβλημα των καμπυλοτήτων σε διαρροή και αστοχία διατομών οπλισμένου σκυροδέματος λαμβάνοντας υπόψη τη ρηγμάτωση. Ταυτόχρονα υπολογίζει τον αντίστοιχο αναγκαίο οπλισμό ή την ροπή αντοχής τόσο σε κατάσταση οριακής διαρροής όσο και οριακής αστοχίας. Το πρόβλημα των πραγματικών καμπυλοτήτων, υπολογιστικά ανάγεται στο πρόβλημα διαστασιολόγησης των διατομών σε κατάσταση διαρροής και σε κατάσταση αστοχίας. Η εργασία αυτή δείχνει στον ερευνητή και στο μελετητή το συστηματικό τρόπο υπολογισμού των παραμορφώσεων  $\epsilon_c$  και  $\epsilon_s$  για κάθε κατηγορία σκυροδέματος και χάλυβα, τυποποιημένης ή τυχούσας διατομής. Αυτός ο υπολογισμός, αν και πολύπλοκος, είναι ο αναγκαίος για τον προσδιορισμό της εκάστοτε καμπυλότητας. Η κεντρική ιδέα παρουσιάζεται με έμφαση στις «περιοχές λύσεων» καθώς και στις κρίσιμες περιπτώσεις των «ασυμπτωτικών περιοχών», τόσο σε κατάσταση διαρροής όσο και σε κατάσταση αστοχίας. Η πλήρης έρευνα της διαστασιολόγησης σε διαρροή και αστοχία έχει ολοκληρωθεί και επιβεβαιωθεί με εξελιγμένους αλγορίθμους και είναι έτοιμη προς έκδοση.

**Λέξεις Κλειδιά:** Διαστασιολόγηση, Κάμψη, Καμπυλότητα, Πλαστιμότητα, Διαρροή, Αστοχία, Ροπή Αντοχής, Οπλισμός

## 1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Οι καμπυλότητες και οι δυσκαμψίες διαρροής και αστοχίας, εξαρτώνται από την ποσότητα του οπλισμού, την αντοχή του οπλισμού, την αντοχή του σκυροδέματος και την αξονική δύναμη. Οι μεγάλες σχετικές μετακινήσεις της κεφαλής των υποστυλωμάτων σε σχέση με τη βάση τους, άρα και των διαφραγμάτων, αυξάνει σημαντικά τις ιδιοπεριόδους των κτιρίων με αποτέλεσμα να είναι χαμηλές οι σεισμικές επιταχύνσεις, πράγμα πολύ σημαντικό για τις δυνατότητες αντοχής των κτιρίων ιδιαίτερα μάλιστα στον έλεγχο αντοχής υπαρχόντων κτιρίων σε σεισμό.

Η εύρεση της πραγματικής καμπυλότητας, τόσο σε κατάσταση διαρροής όσο και σε κατάσταση αστοχίας, απαιτεί υπολογισμό των παραμορφώσεων σκυροδέματος  $\epsilon_c$  και χάλυβα  $\epsilon_s$  υπό αξονική δύναμη  $N$  και ροπή  $M$  (ή ισοδύναμα οπλισμό  $A_s$ ), ένα εξαιρετικά πολύπλοκο υπολογιστικό πρόβλημα με μεγάλο εύρος επιμέρους λύσεων. Παλαιότερα χρησιμοποιούνταν πίνακες υπολογισμού, οι οποίοι όμως διατίθεντο μόνο για κατάσταση αστοχίας και κατά κανόνα για συγκεκριμένα υλικά. Σήμερα, λόγω της ποικιλίας των υλικών και της ανάγκης ελέγχου της πραγματικής αντοχής και ενδεχομένως ενίσχυσης υπαρχόντων κτιρίων, καθίσταται απαραίτητη και η διαστασιολόγηση σε κατάσταση διαρροής. Αυτός είναι ο λόγος της εκτενούς έρευνάς μας για εύρεση γενικής θεωρητικής λύσης του προβλήματος της διαστασιολόγησης σε κάμψη, τόσο

<sup>1</sup> Πολιτικός Μηχανικός/Μηχανικός Λογισμικού/Συγγραφέας, BuildingHow PC, apl@pi.gr

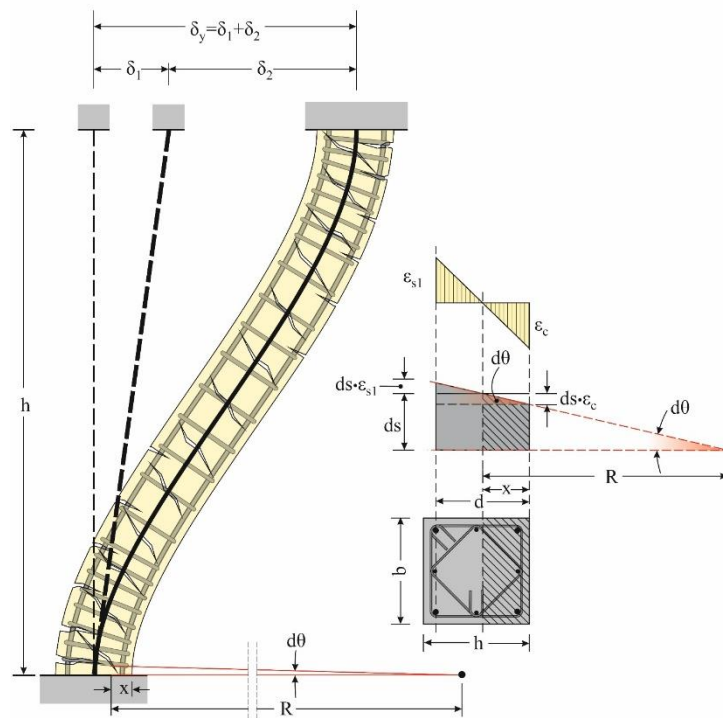
<sup>2</sup> Αναπληρωτής Καθηγητής, Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών, Πανεπιστήμιο Νεάπολις Πάφου, j.bellos@nup.ac.cy

σε κατάσταση διαρροής όσο και αστοχίας, έρευνα που αποτυπώνεται σε εργασία 200 σελίδων και μέρος της οποίας παρουσιάζεται στο άρθρο αυτό.

## 2 ΟΡΙΑΚΕΣ ΚΑΤΑΣΤΑΣΕΙΣ ΥΠΟΣΤΥΛΩΜΑΤΟΣ

### 2.1 Υποστύλωμα σε Κατάσταση Ορίου Διαρροής

Η Εικόνα 1 παρουσιάζει προσομοίωση της οριακής κατάστασης διαρροής υποστυλώματος. Οι καμπτικές ρωγμές είναι κάθετες στον άξονα της ράβδου και οι ρωγμές διάτμησης έχουν κλίση της τάξης των  $45^\circ$  έως  $60^\circ$  ως προς τον άξονα της ράβδου. Εδώ  $\delta_1$  είναι η μετακίνηση λόγω διάτμησης, η οποία είναι ευθύγραμμη και δεν επηρεάζει την καμπυλότητα και  $\delta_2$  είναι η μετακίνηση λόγω κάμψης σε οριακή κατάσταση διαρροής με ρηγματώσεις.



Εικόνα 1: Υποστύλωμα σε οριακή κατάσταση διαρροής (δεν είναι υπό κλίμακα).

Σε στοιχειώδες ύψος  $ds$  της ράβδου στη βάση της διατομής, η εσωτερική ίνα θλίβεται και συρρικνώνεται κατά  $ds \cdot \varepsilon_c$  ενώ η εξωτερική ίνα εφελκύεται και διευρύνεται κατά  $ds \cdot \varepsilon_{s1}$ . Τότε η γωνία  $d\theta$  που δημιουργείται, είναι:

$$d\theta = ds \cdot (\varepsilon_c + \varepsilon_{s1})/d \quad \text{και} \quad d\theta = ds/R \quad (1)$$

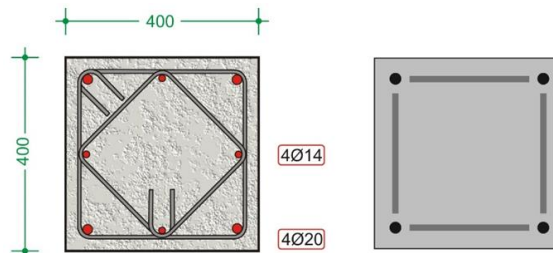
Από τις σχέσεις (1) προκύπτει

$$ds/R = ds \cdot \frac{(\varepsilon_c + \varepsilon_{s1})}{d} \quad \rightarrow \quad \varphi_y = 1/R = (\varepsilon_c + \varepsilon_{s1})/d \quad (2)$$

όπου  $\varphi_y$  συμβολίζει την πραγματική καμπυλότητα διαρροής [1]. Σημειωτέο ότι στην κατάσταση διαρροής πρέπει να είναι  $\varepsilon_c \leq \varepsilon_{c2}$  και  $\varepsilon_{s1} \leq \varepsilon_{yd}$ , όπου η παραμόρφωση διαρροής ενός τουλάχιστον από τα δύο υλικά, είτε η  $\varepsilon_c$  του σκυροδέματος είτε η  $\varepsilon_{s1}$  του χάλυβα, εξαντλείται.

### Παράδειγμα:

Εξετάζεται αμφίπακτο υποστυλώμα ύψους  $h=3.0$  m υπό οριζόντια δύναμη  $F$  και αξονική δύναμη  $N_d=-800$  kN (βλέπε Εικόνα 2). Η διατομή είναι  $400 \times 400$ ,  $f_{ck}=30$  MPa,  $\gamma_c=1.50$ ,  $f_{yk}=500$  MPa,  $\gamma_s=1.15$ ,  $e_{su}=20\%$ ,  $K=1.0$  με  $d_1=d_2=50$  mm. Ο οπλισμός που έχει επιλεγεί είναι  $4\Phi 20+4\Phi 14$  ( $=1860$  mm<sup>2</sup>,  $\rho=1.16\%$ ). Ο γωνιακός οπλισμός θα θεωρηθεί στο 50% του συνολικού και ο διανεμημένος στο άλλο 50% (βλέπε Εικόνα 2).



Εικόνα 2: Διατομή υποστυλώματος με τον οπλισμό του και αντίστοιχο προσομοίωμα προς διαστασιολόγηση.

Ζητούνται: Οι καμπυλότητες διαρροής  $\varphi=1/R$  και οι ροπές αντοχής  $M_{Rd}$  στις καταστάσεις:

- α) ορίου διαρροής  $y$  και
- β) ορίου αστοχίας  $u$

### Απάντηση στο παράδειγμα για κατάσταση ορίου διαρροής:

Από τη διαστασιολόγηση της διατομής προκύπτει  $x=187.5$  mm,  $M_{Rd,y}=185$  kNm,  $\varepsilon_c=2.0\%$  και  $\varepsilon_{sI}=1.734\%$ . Άρα

$$\varphi_y = (2.0 + 1.734) \times 10^{-3} / (0.40 - 0.05) = 10.67 \times 10^{-3} / \text{m} \rightarrow R_y = 94 \text{ m}$$

Η αντίστοιχη καμπυλότητα ελαστικότητας (χωρίς ρηγματώσεις) στη βάση του υποστυλώματος θα προκύψει από τη σχέση

$$\varphi_{elastic} = 1/R = M_{Rd,y} / (E \cdot I)$$

Σύμφωνα με τον EC2 [§3.1.2(3)] [4] είναι  $f_{cm}=f_{ck}+8=38$  MPa και  $E=22 \times (f_{cm}/10)^{0.3} \times 10^3=32.8$  GPa, οπότε προκύπτει  $E \cdot I=32.8 \times (0.4 \times 0.4^3/12)=70.0 \times 10^3$  kNm<sup>2</sup>. Άρα

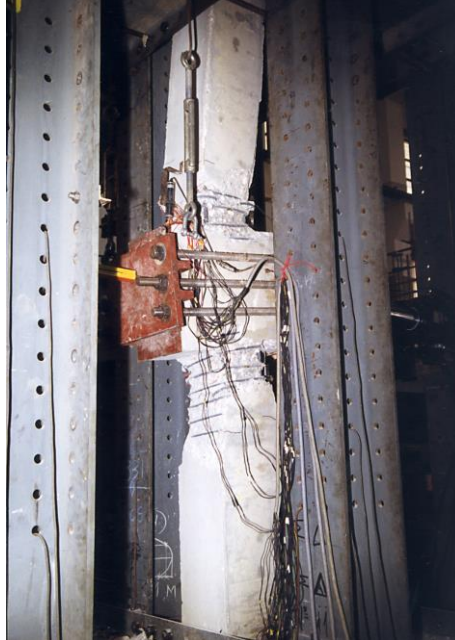
$$\varphi_{elastic} = 185 / (70.0 \times 10^3) = 2.64 \times 10^{-3} / \text{m} \rightarrow R = 379 \text{ m}$$

Συνεπώς είναι  $\varphi_y / \varphi_{elastic} = 4.04$ , το οποίο έχει τη σημασία του για τον προσδιορισμό της ενεργής δυσκαμψίας σύμφωνα με τον EC8 [§4.3.1(6) & (7)] [5].

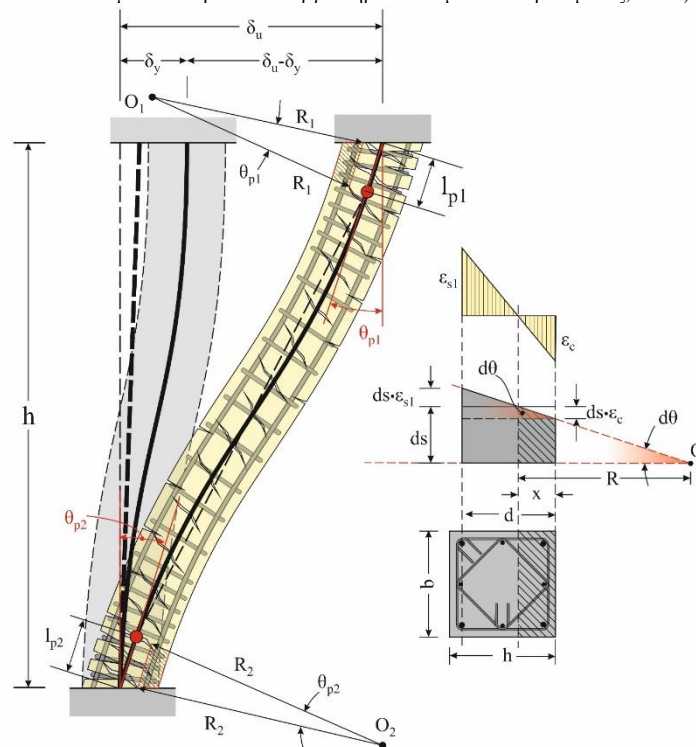
### 2.2 Υποστυλώμα σε Κατάσταση Ορίου Αστοχίας

Το φαινόμενο της λειτουργίας ενός υποστυλώματος σε κατάσταση οριακής αστοχίας αναπαρίσταται στην Εικόνα 3, με το μοναδικό εφικτό εποπτικό τρόπο που είναι ο πειραματικός. Το πείραμα, που αποτελούσε μέρος των δοκιμών ελέγχου των «Αντισεισμικών Θωράκων», έλαβε χώρα το 1998 στο εργαστήριο οπλισμένου σκυροδέματος του ΕΜΠ υπό την αιγίδα του

Καθηγητή Θεοδόσιου Τάσιου. Είναι προφανές ότι η αστοχία του υποστυλώματος πραγματοποιείται σε σχετικά μικρό ύψος των άκρων των στοιχείων ενώ το υπόλοιπο ύψος είναι σε κατάσταση διαρροής (οριακή διαρροή με ρηγματώσεις) [1,2].



Εικόνα 3: Ο τρόπος δημιουργίας πλαστικής άρθρωσης στα δύο άκρα κόμβου λόγω ισχυρής εναλλασσόμενης έντασης (Δοκιμές ελέγχου «Αντισεισμικών Θωράκων» - Εργαστήριο οπλισμένου σκυροδέματος, ΕΜΠ).



Εικόνα 4: Υποστύλωμα σε οριακή κατάσταση αστοχίας με πλαστικοποίηση των ακραίων περιοχών (δεν είναι υπό κλίμακα).

Η Εικόνα 4 παρουσιάζει προσομοίωση της οριακής κατάστασης αστοχίας υποστυλώματος. Οι καμπτικές και διατμητικές ρωγμές είναι έντονες στις κρίσιμες ακραίες περιοχές, ενώ παραμένουν ίδιες με την κατάσταση διαρροής στον υπόλοιπο κορμό.

Με ακριβώς ανάλογο τρόπο του ορίου διαρροής υπολογίζονται και οι καμπυλότητες αστοχίας  $\varphi_u$

$$\varphi_{u,j} = \frac{1}{R_j} = \frac{\varepsilon_c + \varepsilon_{s1}}{d}, \quad j = 1, 2 \quad (1 = \text{κεφαλή}, 2 = \text{πόδας}) \quad (3)$$

Όταν ο οπλισμός της κεφαλής και του πόδα είναι ίδιος, όπως κατά κανόνα ισχύει,  $\varphi_{u,1} = \varphi_{u,2} = \varphi_u$ . Στην κατάσταση αστοχίας πρέπει να είναι  $\varepsilon_c \leq \varepsilon_{cu2}$  και  $\varepsilon_{s1} \leq \varepsilon_{ud}$ , όπου η παραμόρφωση αστοχίας ενός τουλάχιστον από τα δύο υλικά, είτε η  $\varepsilon_c$  του σκυροδέματος είτε η  $\varepsilon_{s1}$  του χάλυβα, εξαντλείται.

### Απάντηση στο παράδειγμα για κατάσταση ορίου αντοχής:

Από τη διαστασιολόγηση της διατομής προκύπτει  $x=156.1 \text{ mm}$ ,  $M_{Rd,u}=219 \text{ kNm}$ ,  $\varepsilon_c=3.5\%$  και  $\varepsilon_{s1}=4.35\%$ . Άρα

$$\varphi_u = (3.5 + 4.35) \times 10^{-3} / (0.40 - 0.05) = 22.42 \times 10^{-3} / \text{m} \rightarrow R_u = 45 \text{ m}$$

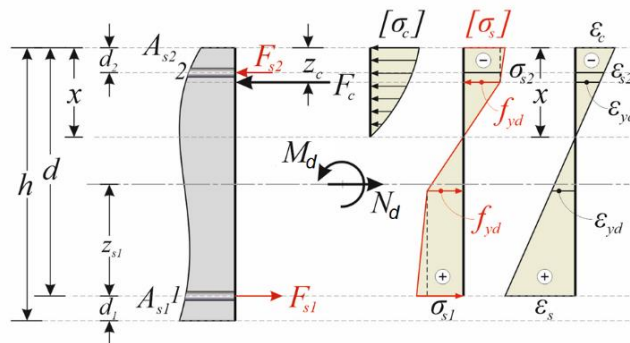
Κατ' αντιστοιχία της κατάστασης ορίου διαρροής είναι

$$\varphi_{\text{elastic}} = 219 / (70.0 \times 10^3) = 3.13 \times 10^{-3} / \text{m} \rightarrow R = 320 \text{ m}$$

Συνεπώς είναι  $\frac{\varphi_u}{\varphi_y} = \mathbf{2.10}$  και  $\frac{\varphi_u}{\varphi_{\text{elastic}}} = \mathbf{7.16}$ .

## 3 ΙΣΟΡΡΟΠΙΑ ΕΣΩΤΕΡΙΚΩΝ-ΕΞΩΤΕΡΙΚΩΝ ΔΥΝΑΜΕΩΝ

### 3.1 Εξισώσεις ισορροπίας



Εικόνα 5: Εξωτερικές και εσωτερικές δυνάμεις διατομής σε μονοαξονική κάμψη.

Από την Εικόνα 5 προκύπτουν οι ακόλουθες σχέσεις:

$$x = d \cdot \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_c + \varepsilon_s}, \quad \varepsilon_c = \varepsilon_s \cdot \frac{x}{d-x}, \quad \varepsilon_s = \varepsilon_c \cdot \frac{d-x}{x}, \quad \varepsilon_{s2} = \varepsilon_c \cdot \frac{x-d_2}{x} \quad (4)$$

$$k_F = \alpha_{cc} \cdot f_{cd} \cdot b, \quad F_c = k_F \cdot x \cdot \alpha, \quad z_c = x \cdot \kappa \quad (5)$$

$$F_{s1} = A_{s1} \cdot \sigma_{s1}, \quad F_{s2} = A_{s2} \cdot \sigma_{s2} \quad (6)$$

Δύο είναι οι βασικές εξισώσεις ισορροπίας των εσωτερικών εντάσεων της διατομής με τις εξωτερικές εντάσεις (βλέπε Εικόνα 5):

1) Η εξίσωση των εσωτερικών δυνάμεων  $F_{s1}$ ,  $F_c$ ,  $F_{s2}$  με την εξωτερική δύναμη  $N_d$

$$F_{s1} - F_c - F_{s2} = N_d \quad (7)$$

2) Η εξίσωση των ροπών των εσωτερικών δυνάμεων  $F_c$ ,  $F_{s2}$  με την εξωτερική ροπή  $M_{sd}$  στη στάθμη του εφελκόμενου οπλισμού

$$M_{sd} = F_c \cdot (d - z_c) + F_{s2} \cdot (d - d_2) \quad (8)$$

Οι εξισώσεις (7) και (8), με χρήση των (4), (5) και (6), μετασχηματίζονται στις εξισώσεις:

$$A_{s1} \cdot \sigma_{s1} = A_{s2} \cdot \sigma_{s2} + F_c + N_d \quad (9)$$

$$M_{sd} = F_c \cdot (d - z_c) + A_{s2} \cdot \sigma_{s2} \cdot (d - d_2) \quad (10)$$

Εάν  $\rho_1 = A_{s1}/A_c$  και  $\rho_2 = A_{s2}/A_c$ , οπότε  $\rho_2/\rho_1 = A_{s2}/A_{s1}$  και  $A_{s2} = A_{s1} \cdot \rho_2/\rho_1$ , τότε οι (9) και (10) γράφονται

$$A_{s1} = \frac{F_c + N_d}{\sigma_{s1} - \frac{\rho_2}{\rho_1} \cdot \sigma_{s2}} \quad (11)$$

$$M_{sd} = F_c \cdot (d - z_c) + A_{s1} \cdot \frac{\rho_2}{\rho_1} \cdot \sigma_{s2} \cdot (d - d_2) \quad (12)$$

Η αξονική δύναμη  $N_d$  έχει πάντοτε δεδομένη τιμή, ανεξάρτητη από τις παραπάνω σχέσεις.

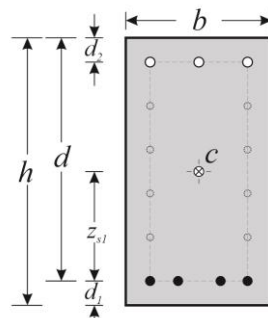
Το σύστημα των εξισώσεων (11) και (12) έχει τρεις αγνώστους τα  $\varepsilon_c$ ,  $\varepsilon_s$  και το  $A_{s1}$  ή το  $M_{sd}$  στο αντίστοιχο πρόβλημα. Η λύση του συστήματος απαιτεί να δοθούν επιπλέον συνθήκες:

- 1<sup>η</sup> συνθήκη: δίνεται το  $\rho_2/\rho_1$  και
- 2<sup>η</sup> συνθήκη: το  $\varepsilon_c$  ή/και το  $\varepsilon_s$  θα είναι σε οριακή παραμόρφωση

Οι δύο αυτές συνθήκες υπό ορισμένες προϋποθέσεις υποκαθιστούν την τρίτη εξίσωση. Όμως οι συνδυασμοί τους είναι πολλοί και πολύπλοκοι, ιδιαίτερα στην κατάσταση αστοχίας. Η δυσκολία αίρεται με τη χρήση της μεθόδου των δοκιμαστικών επιλύσεων, η οποία όμως προϋποθέτει υπολογισμό των ορίων της λύσης, κάτι που είναι αρκετά σύνθετο.

### 3.2 Παράδειγμα «Τυπικής Ορθογωνικής Διατομής»

Στην Εικόνα 6 παρουσιάζεται διατομή διαστάσεων 300mm x 550mm από σκυρόδεμα C30/37 και χάλυβα B500, που χρησιμοποιείται σε όλα τα παραδείγματα αυτού του άρθρου.



Εικόνα 6: «Τυπική ορθογωνική διατομή».

Δίνονται:  $b=300 \text{ mm}$ ,  $h=550 \text{ mm}$ ,  $d_2=50 \text{ mm}$ ,  $d_1=50 \text{ mm}$ ,  
 $f_{ck}=30 \text{ MPa}$ ,  $\gamma_c=1.50$ ,  $a_{cc}=0.85$ ,  $\varepsilon_{c2}=2.0\text{‰}$ ,  $\varepsilon_{cu2}=3.5\text{‰}$ ,  
 $f_{yk}=500 \text{ MPa}$ ,  $\gamma_s=1.15$ ,  $E_s=200 \text{ GPa}$  (για χάλυβες κατηγορίας B500a,b,c)  
 Προκύπτουν:  $d=h-d_1=500 \text{ mm}$ ,  $z_{s1}=h/2-d_1=0.225 \text{ m}$   
 $f_{cd}=f_{ck}/\gamma_c=20.0 \text{ MPa}$ ,  $k_F=a_{cc}\cdot b\cdot f_{cd}=0.85\cdot 0.30\cdot 20.0\cdot 10^3=5100 \text{ kN/m}$ ,  
 $f_{yd}=f_{yk}/\gamma_s=500/1.15=434.78 \text{ MPa}$ ,  $\varepsilon_{yd}=f_{yd}/E_s=434.78/(200\cdot 10^3)=2.174\text{‰}$

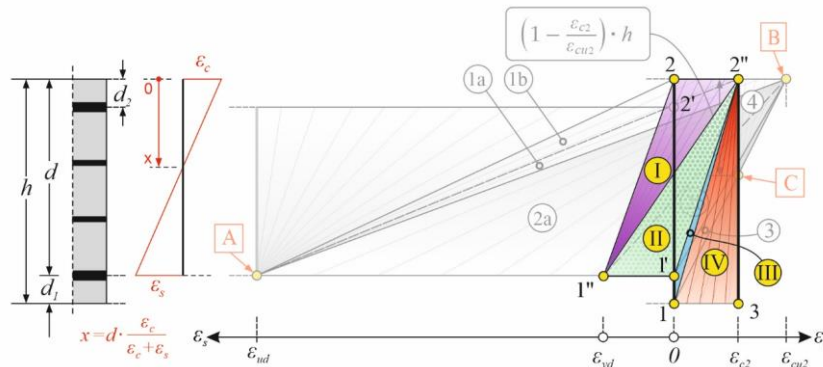
Για  $\varepsilon_c=\varepsilon_{c2}=2\text{‰}$  είναι  $\alpha=0.6667$  και  $\kappa=0.375$ , ενώ για  $\varepsilon_c=\varepsilon_{cu2}=3.5\text{‰}$  είναι  $\alpha=0.8095$  και  $\kappa=0.416$ .

Για κατηγορία χάλυβα B500c, λαμβάνεται  $\varepsilon_{ud}=20\text{‰}$  με  $K=1.0$  σε περίπτωση απλοποιημένου διαγράμματος τάσεων-παραμορφώσεων, ενώ λαμβάνεται  $\varepsilon_{ud}=67.5\text{‰}$  με  $K=1.15$  σε περίπτωση ακριβούς διαγράμματος τάσεων-παραμορφώσεων.

## 4 ΚΑΤΑΣΤΑΣΗ ΔΙΑΡΡΟΗΣ

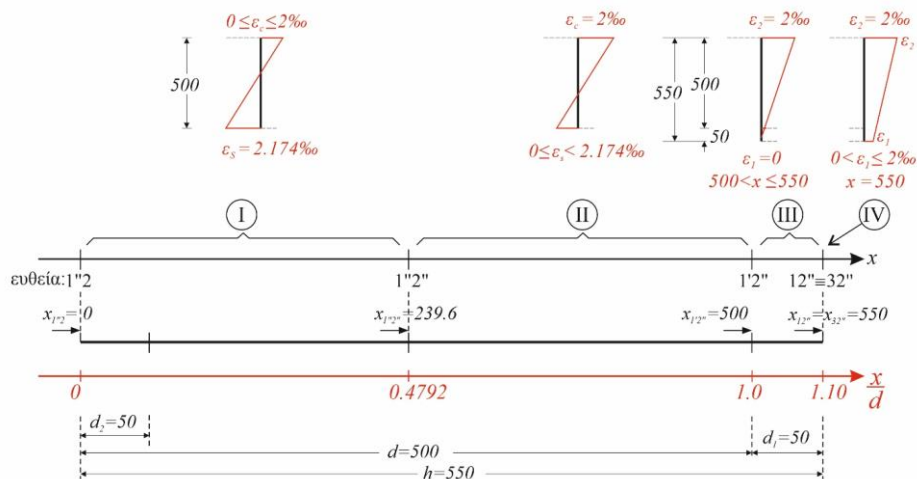
### 4.1 Περιοχές Λύσεων

Οι περιοχές λύσεων σε κατάσταση διαρροής εμφανίζονται στην Εικόνα 7. Με χρήση των περιοχών αυτών σχηματίζουμε την Εικόνα 8, όπου απεικονίζονται οι οριακές περιοχές βάσει των παραμορφώσεων και οι αντίστοιχες θλιβόμενες περιοχές της «τυπικής ορθογωνικής διατομής» σε κατάσταση διαρροής. Ορίζουμε ως αρχή του άξονα  $x$  την απώτερη άνω ίνα της διατομής, ενώ  $x_{i,j}$  είναι το εκάστοτε ύψος της θλιβόμενης ζώνης του σκυροδέματος. Για πρακτικούς λόγους της αναπαράστασης θεωρούμε τη διατομή σε κατάκλιση.

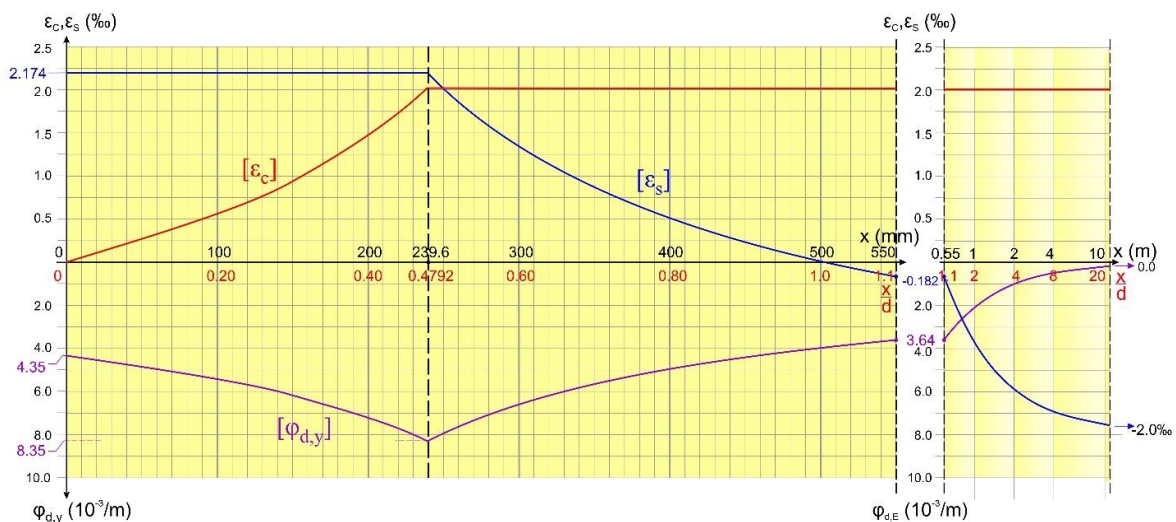


Εικόνα 7: Επιτρεπόμενες κατανομές παραμορφώσεων σε οριακή κατάσταση διαρροής.

Τα διαγράμματα των παραμορφώσεων κατάστασης διαρροής  $\varepsilon_c$ ,  $\varepsilon_s$  και των αντίστοιχων καμπυλοτήτων  $\varphi_{d,E}$  αναπαρίστανται στην Εικόνα 9. Αυτά ισχύουν ανεξάρτητα των τιμών της αξονικής δύναμης  $N_d$  και του λόγου  $\rho_2/\rho_1$ . Οι τιμές του  $x$  δίνονται σε mm μέχρι το συνολικό ύψος  $h=550 \text{ mm}$  και από εκεί και πέρα σε m σε λογαριθμική κλίμακα. Στα προβλήματα της πράξης απαιτούνται οι τιμές των  $A_{s1}$  και  $M_d$  σε κάθε χαρακτηριστικό σημείο της διατομής. Οι τιμές αυτές, όπως φαίνεται στις εξισώσεις (11) και (12), εξαρτώνται τόσο από την τιμή του λόγου  $\rho_2/\rho_1$  του οπλισμού όσο και την τιμή της αξονικής δύναμης  $N_d$ .



Εικόνα 8: Οριακές περιοχές βάσει των παραμορφώσεων και αντίστοιχες θλιβόμενες περιοχές της «τυπικής ορθογωνικής διατομής» σε κατάσταση διαρροής.



Εικόνα 9: Διαγράμματα παραμορφώσεων και αντίστοιχων καμπυλοτήτων σε κατάσταση διαρροής.

## 4.2 Προσδιορισμός Ασυμπτωτικού Σημείου

Έστω  $c = \rho_2 / \rho_1$  ο λόγος του ποσοστού του θλιβόμενου οπλισμού  $\rho_2$  προς το ποσοστό του εφελκόμενου οπλισμού  $\rho_1$ . Για κάθε τιμή του  $c$ , υπάρχει ένα χαρακτηριστικό σημείο, με ύψος θλιβόμενης ζώνης  $x$ , που ο παρονομαστής της εξίσωσης (11) μηδενίζεται. Δηλαδή είναι

$$\sigma_{s1} - c \cdot \sigma_{s2} = 0 \rightarrow \overbrace{E \cdot \varepsilon_{s1}}^{\sigma_{s1}} - c \cdot \overbrace{E \cdot \varepsilon_{s2}}^{\sigma_{s2}} = 0 \rightarrow \varepsilon_{s1} = c \cdot \varepsilon_{s2}$$

Αν λάβουμε υπόψη τις εξισώσεις (4), η παραπάνω σχέση γράφεται

$$\varepsilon_c \cdot \frac{d-x}{x} = c \cdot \varepsilon_c \cdot \frac{x-d_2}{x} \rightarrow x = \frac{d+c \cdot d_2}{1+c} \quad (13)$$

**Εφαρμογή στην «τυπική ορθογωνική διατομή»:**

Στη περίπτωση ασυμπτωτικού σημείου, και για  $c=1.0$ , η σχέση (13) δίνει

$$x = (500 + 1.0 \times 50) / (1 + 1.0) = 275 \text{ mm} \quad \text{και} \quad (d - x) / x = 0.818$$



Επειδή εκεί είναι κρίσιμο το σκυρόδεμα ( $\varepsilon_c = \varepsilon_{c2} = 2.0\%$ ), προκύπτει  $\varepsilon_{s1} = 2.0\% \times 0.818 = 1.636\%$ . Τότε, η δύναμη  $F_c$  που παραλαμβάνει το σκυρόδεμα είναι

$$F_c = k_F \cdot x \cdot \alpha = 5100 \times 0.275 \times 0.6667 = 935.0 \text{ kN}$$

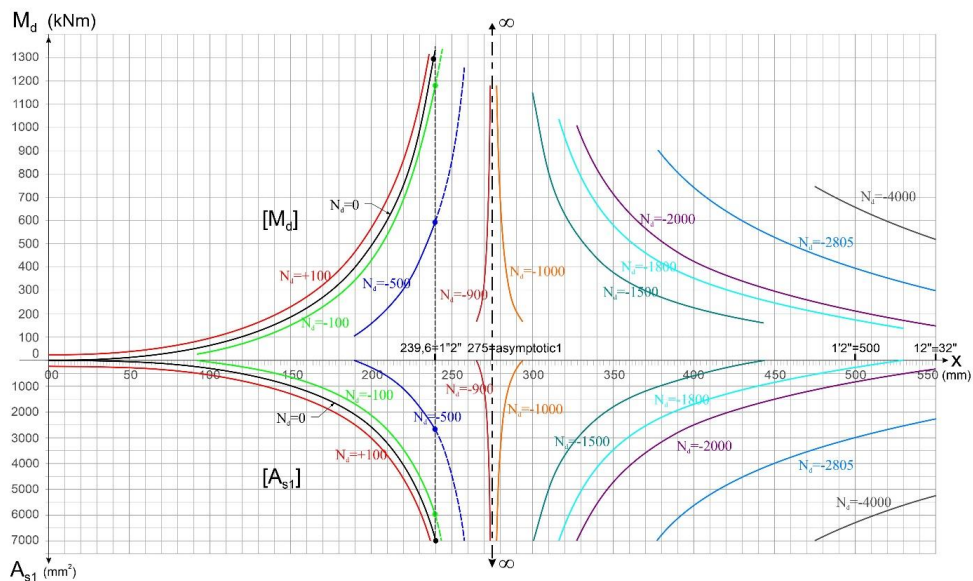
### 4.3 Περιοχές Λύσεων για $\rho_2/\rho_1=1.0$

Ο τρόπος της όπλισης με  $A_{s2}=A_{s1}$  χρησιμοποιείται σε περιπτώσεις που υπάρχουν σημαντικές αξονικές δυνάμεις κυρίως σε υποστυλώματα, ή/και σε περιπτώσεις δοκών με ιδιαίτερες απαιτήσεις αντισεισμικότητας που συνεπάγονται απαιτήσεις υψηλής πλαστιμότητας [3].

Στην Εικόνα 10 παρουσιάζεται διάγραμμα λύσεων υπό μορφή ζευγών ( $M_d, A_{s1}$ ) για  $\rho_2/\rho_1=1$ , σε σχέση με το  $x$  και για διάφορες αξονικές δυνάμεις  $N_d$ . Σε κάθε θέση υπάρχει ένα συγκεκριμένο ζεύγος ( $A_{s1}, M_{sd}$ ) που υπολογίζεται από τις εξισώσεις (7) και (8), ενώ η αντίστοιχη ροπή στο κέντρο βάρους της διατομής δίνεται από τη σχέση

$$M_d = M_{sd} + N_d \cdot z_{s1} \quad (14)$$

Στην περίπτωση αυτή το ασυμπτωτικό σημείο έχει  $x=275.0$  mm (βλέπε §4.2) και ως εκ τούτου χωρίζεται την περιοχή II σε δύο υποπεριοχές. Στο σημείο αυτό είναι  $\varepsilon_c=2.0\%$  και  $F_c=935.0$  kN.



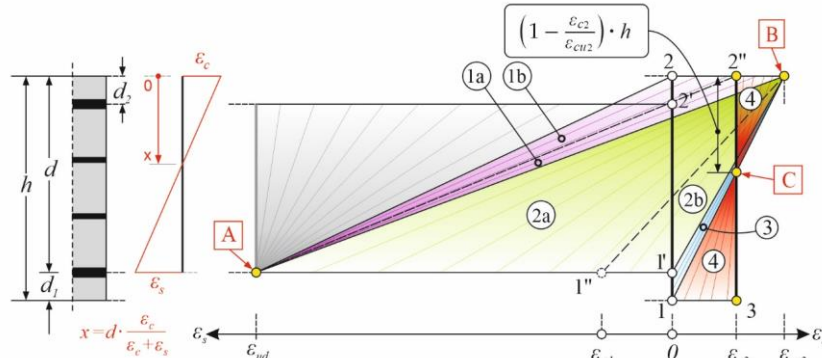
Εικόνα 10: Διάγραμμα ζευγών ( $M_d, A_{s1}$ ) για  $\rho_2/\rho_1=1$ , σε σχέση με το ύψος  $x$  της θλιβόμενης ζώνης και διάφορες αξονικές δυνάμεις  $N_d$ .

## 5 ΚΑΤΑΣΤΑΣΗ ΑΣΤΟΧΙΑΣ

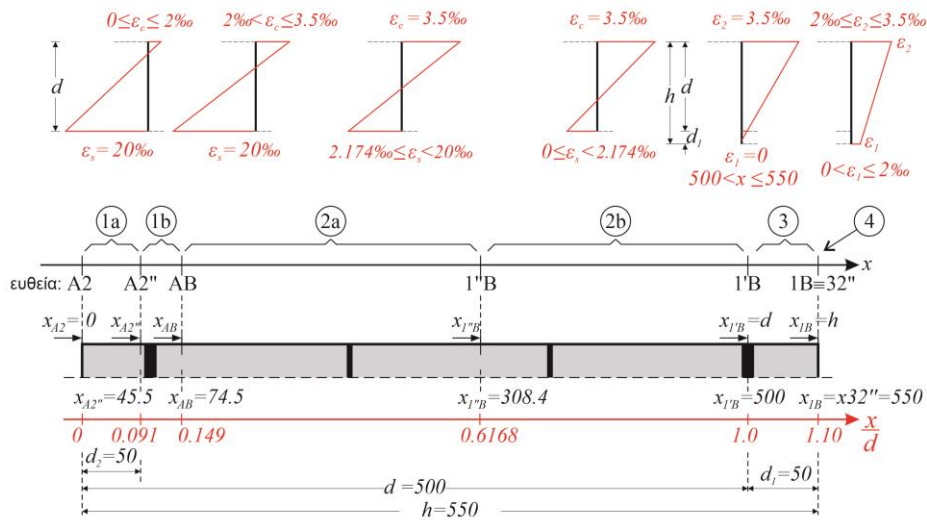
### 5.1 Περιοχές Λύσεων

Οι περιοχές λύσεων σε κατάσταση αστοχίας εμφανίζονται στην Εικόνα 11. Με χρήση των περιοχών αυτών σχηματίζουμε την Εικόνα 12, όπου απεικονίζονται οι οριακές περιοχές βάσει των παραμορφώσεων και οι αντίστοιχες θλιβόμενες περιοχές της «τυπικής ορθογωνικής διατομής» σε κατάσταση αστοχίας. Η περιοχή της λύσης είναι αναγκαία για κάθε είδους αλγοριθμική επίλυση διατομής, επειδή χρειάζονται το άνω και το κάτω όριο του  $x$  με τις αντίστοιχες τιμές της μη κρίσιμης παραμόρφωσης του χάλυβα ή του σκυροδέματος. Στην

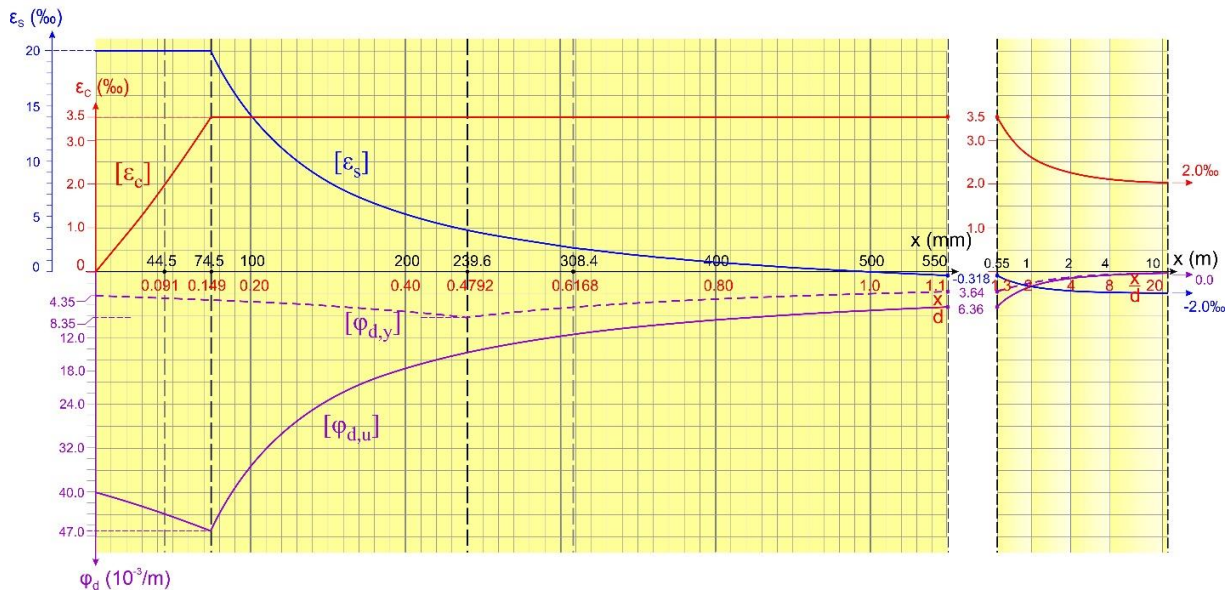
περίπτωση ακριβούς διαγράμματος τάσεων-παραμορφώσεων του χάλυβα π.χ. για  $\epsilon_{ud}=67.5\%$  και  $K=1.15$ , αλλάζουν σημαντικά οι Α2'' και ΑΒ, αλλά η διαδικασία υπολογισμών παραμένει η ίδια. Επίσης, οι διαφορές στις τιμές των διαστασιολογήσεων σε περιπτώσεις της πράξης είναι πολύ μικρές.



Εικόνα 11: Επιτρεπόμενες κατανομές παραμορφώσεων στην οριακή κατάσταση αστοχίας.



Εικόνα 12: Οριακές περιοχές παραμορφώσεων και δημιουργία των αντίστοιχων θλιβόμενων περιοχών της «τυπικής ορθογωνικής διατομής» σε κατάσταση αστοχίας.



Εικόνα 13: Διαγράμματα παραμορφώσεων και αντίστοιχων καμπυλοτήτων σε κατάσταση αστοχίας.

Τα διαγράμματα των παραμορφώσεων κατάστασης αστοχίας  $\varepsilon_c$ ,  $\varepsilon_s$  και των αντίστοιχων καμπυλοτήτων  $\varphi_{d,F}$  αναπαρίστανται στην Εικόνα 13. Αυτά ισχύουν ανεξάρτητα των τιμών της αξονικής δύναμης  $N_d$  και του λόγου  $\rho_2/\rho_1$ . Οι τιμές του  $x$  δίνονται σε mm μέχρι το συνολικό ύψος  $h=550$  mm και από εκεί και πέρα σε m σε λογαριθμική κλίμακα. Στα προβλήματα της πράξης απαιτούνται οι τιμές των  $A_{s1}$  και  $M_d$  σε κάθε χαρακτηριστικό σημείο της διατομής. Οι τιμές αυτές, όπως φαίνεται στις εξισώσεις (11) και (12), εξαρτώνται τόσο από την τιμή του λόγου  $\rho_2/\rho_1$  του οπλισμού όσο και την τιμή της αξονικής δύναμης  $N_d$ .

## 5.2 Προσδιορισμός Ασυμπτωτικής Περιοχής

Έστω  $c=\rho_2/\rho_1$  ο λόγος του ποσοστού του θλιβόμενου οπλισμού  $\rho_2$  προς το ποσοστό του εφελκόμενου οπλισμού  $\rho_1$ . Για  $c=1.0$ , ο παρονομαστής της σχέσης (11) γράφεται  $d\sigma=\sigma_{s1}-\sigma_{s2}$ .

Παρατηρώντας τώρα τις κατανομές παραμορφώσεων της Εικόνα 11 συμπεραίνουμε ότι:

- Η λύση 1''B, που βρίσκεται στο όριο των περιοχών 2a και 2b, έχει  $\varepsilon_{s1}=\varepsilon_{yd} \rightarrow \sigma_{s1}=f_{yd}$  και  $\varepsilon_c=\varepsilon_{cu2}$ . Επειδή κατά κανόνα  $\varepsilon_{s2}\geq\varepsilon_{yd} \rightarrow \sigma_{s2}=f_{yd}$ , θα έχουμε  $d\sigma=\sigma_{s1}-\sigma_{s2}=0$ .
- Αριστερά του σημείου 1'' θα συνεχίσει να είναι  $d\sigma=0$  μέχρι σημείου 01 που έχει  $\varepsilon_{s1}=\varepsilon_{s2}$ .

Αν λάβουμε υπόψη τις εξισώσεις (4) για  $\varepsilon_{s2}=\varepsilon_{yd}$  και  $\varepsilon_c=\varepsilon_{cu2}$ , το ύψος της θλιβόμενης ζώνης του σημείου 01 είναι

$$\varepsilon_{yd} = \varepsilon_{cu2} \cdot (x_{01} - d_2)/x_{01} \rightarrow x_{01} = d_2 \cdot \varepsilon_{cu2}/(\varepsilon_{cu2} - \varepsilon_{yd}) \quad (15)$$

Σημειώτέο ότι το «ασυμπτωτικό σημείο» είναι ανεξάρτητο της κατηγορίας σκυροδέματος.

### Εφαρμογή στην «τυπική ορθογωνική διατομή»:

Από την σχέση (15) προκύπτει  $x_{01}=50 \times 3.5/(3.50-2.174)=132.0$  mm, ενώ το σκυρόδεμα παραλαμβάνει δύναμη  $F_c=k_F \cdot x_{01} \cdot \alpha = 5100 \times 0.132 \times 0.8095 = 544.9$  kN.

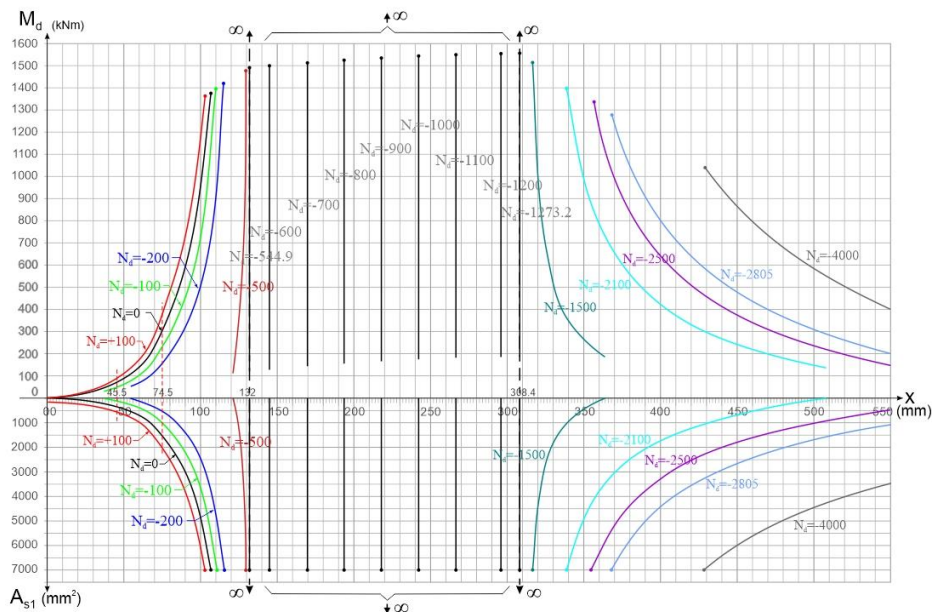
Από τις εξισώσεις (4) προκύπτει  $x_{1''B}=d \cdot \varepsilon_{cu2}/(\varepsilon_{cu2}+\varepsilon_{yd})=500 \times 3.5/(3.5+2.174)=308.4$  mm, ενώ το σκυρόδεμα παραλαμβάνει δύναμη  $F_c=k_F \cdot x_{1''B} \cdot \alpha = 5100 \times 0.3084 \times 0.8095 = 1273.2$  kN.

Άρα η εξίσωση (11) έχει μηδενικό παρονομαστή σε όλο το διάστημα μεταξύ  $x_{01}=132.0$  mm και  $x_{1''B}=308.4$  mm.

## 5.3 Περιοχές Λύσεων για $\rho_2/\rho_1=1.0$

Στην Εικόνα 14 παρουσιάζεται διάγραμμα λύσεων υπό μορφή ζευγών ( $M_d$ ,  $A_{s1}$ ) για  $\rho_2/\rho_1=1$ , σε σχέση με το  $x$  και για διάφορες αξονικές δυνάμεις  $N_d$ . Σε κάθε θέση υπάρχει ένα συγκεκριμένο ζεύγος ( $A_{s1}$ ,  $M_{sd}$ ) που υπολογίζεται από τις εξισώσεις (7) και (8). Στο διάγραμμα αποτυπώνονται στην αρχή οι περιοχές κυρίαρχης κάμψης και στο τέλος οι περιοχές κυρίαρχης θλίψης. Διακρίνεται επίσης εκτενής μια περιοχή πολλαπλών λύσεων, που θεωρητικά εκτείνεται στο άπειρο. Επισημαίνεται ότι στην εδώ περίπτωση με  $\rho_2/\rho_1=1$ , υπάρχουν δύο ασυμπτωτικά σημεία (υπό την έννοια μηδενισμού του παρονομαστή της εξίσωσης (11)), τα 01 και 1''B, όπως αυτά

προέκυψαν στην εφαρμογή της §5.2. Έτσι η περιοχή 2α χωρίζεται στις περιοχές (ΑΒ, 01) και (01, 1''Β).



Εικόνα 14: Διάγραμμα ζευγών ( $M_d, A_{s1}$ ) για  $\rho_2/\rho_1=1$ , σε σχέση με το ύψος  $x$  της θλιβόμενης ζώνης και διάφορες αξονικές δυνάμεις  $N_d$ .

#### 5.4 Περιοχή Απροσδιοριστίας ή Πολλαπλών Λύσεων

Η περιοχή αυτή εκτείνεται μεταξύ των δύο ασύμπτωτων σημείων 01 και 1''Β που βρίσκονται στις θέσεις  $x_{01}=132$  mm και  $x_{1''B}=308.4$  mm αντίστοιχα (βλέπε Εικόνα 14). Κατ' αντιστοιχία δυνάμεων, μπορούμε να πούμε ότι στην περιοχή απροσδιοριστίας βρίσκονται οι διατομές όταν καταπονούνται από αξονική δύναμη  $544.9 \text{ kN} \leq N_d \leq 1273.2 \text{ kN}$  (βλέπε εφαρμογή στην §5.2).

Στην περιοχή απροσδιοριστίας είναι  $\sigma_{s1}=\sigma_{s2}$ , οπότε η εξίσωση (11) δίνει απροσδιοριστία  $A_{s1}=\infty$  για  $F_c+N_d \neq 0$  και απειρία λύσεων για  $F_c+N_d=0$ . Για κάθε  $N_d$  στην περιοχή υπάρχει ένα συγκεκριμένο  $x$  που δίνει  $F_c=-N_d$ . Το σημείο αυτό έχει  $x=F_c/(a_c \cdot f_{cd} \cdot b \cdot \alpha)$  και εξασκείται στο σημείο με  $z_c=x \cdot \kappa$ , όπου  $\alpha=0.8095$  και  $\kappa=0.416$  (επειδή  $\varepsilon_c=\varepsilon_{cu2}=3.5\%$  - βλέπε §3.2). Η παραμόρφωση είναι  $\varepsilon_{s1}=\varepsilon_c \cdot (d-x)/x$  ενώ η δύναμη  $F_{s2}=A_{s2} \cdot \sigma_{s2}=A_{s1} \cdot f_{yd}$ .

Επειδή είναι  $F_c=-N_d$ ,  $\rho_2/\rho_1=1$  και  $\sigma_{s2}=\sigma_{s1}=f_{yd}$ , ο συνδυασμός των εξισώσεων (12) και (14) δίνει

$$M_d = A_{s1} \cdot f_{yd} \cdot (d - d_2) - N_d \cdot (d - z_c - z_{s1}) \quad (16)$$

Η σχέση (16) συνδέει μονοσήμαντα τα  $A_{s1}$ ,  $M_d$ . Έτσι όταν δίνεται το  $M_d$  σε ένα πρόβλημα υπολογίζεται το  $A_{s1}$  ενώ όταν δίνεται το  $A_{s1}$  υπολογίζεται το  $M_d$ .

Παρατήρηση: Όλα τα ζεύγη ( $M_d, A_{s1}$ ) που έχουν το ίδιο  $N_d$  έχουν και τα ίδια  $\varepsilon_{s1}$  και  $\varepsilon_c$ , συνεπώς και την ίδια καμπυλότητα  $\varphi_d$ .

**Εφαρμογή στην «τυπική ορθογωνική διατομή» για  $\rho_2/\rho_1=1.0$  και  $N_d=-1000$  kN:**

Είναι  $x=1000/(0.85 \times 20 \times 10^3 \times 0.30 \times 0.8095)=0.2422$  m,  $z_c=0.2422 \times 0.416=0.101$  m,  
 $\varepsilon_{s1}=3.5 \times (0.50-0.2422)/0.2422=3.73\%$ ,  $\varepsilon_c=3.5\%$ ,  $\varphi_d=(3.5+3.73)/0.50=14.46$  ‰/m

Για  $A_{s1}=A_{s2}=0$  (δηλαδή όταν οριακά δεν απαιτείται οπλισμός), από την (16) προκύπτει  $M_d=0+1000\times(0.50-0.101-0.225)=174$  kNm. Δηλαδή για αξονική δύναμη  $N_d=-1000$ kN και ροπή  $M_d\leq 174$  kNm δεν χρειάζεται οπλισμός.

Για  $A_{s1}=A_{s2}=7000$  mm<sup>2</sup> (επιλογή μέγιστης τιμής του  $A_s$  στην Εικόνα 14), από την εξίσωση (16) προκύπτει  $M_d=7000\times 10^{-6}\times 434.78\times 10^3\times(0.50-0.05)+1000\times(0.50-0.101-0.225)=1544$  kNm.

Για  $M_d=800$  kNm, από την εξίσωση (16) προκύπτει  $A_{s1}=[800-1000\times(0.50-0.101-0.225)] / [434.78\times 10^3\times(0.50-0.05)]=3.200\times 10^{-3}$  m<sup>2</sup>=3200 mm<sup>2</sup>. Δηλαδή η λύση προσδιορίζεται σαν ένα ζεύγος (800, 3200) από τα άπειρα ζεύγη συγκεκριμένων λύσεων πάνω στην ευθεία  $N_d=-1000$ kN.

## ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

- Η επιρροή της ρηγματώσης στην καμπυλότητα στοιχείων από Ο.Σ. είναι σημαντική σε σχέση με την αντίστοιχη καμπυλότητα ελαστικότητας ακόμη και σε κατάσταση διαρροής, άρα και η αντίστοιχη δυσκαμψία διαρροής είναι σημαντικά μικρότερη σε σχέση με τη δυσκαμψία ελαστικότητας.
- Για συγκεκριμένο οπλισμό κάμψης, η καμπυλότητα σε διαρροή είναι πολύ μικρότερη της καμπυλότητας σε αστοχία, ενώ η ροπή αντοχής σε διαρροή είναι λίγο μικρότερη της ροπής αντοχής σε αστοχία.
- Η σειρά διαστασιολόγησης είναι (α) σε αστοχία που δίνει ένα συγκεκριμένο οπλισμό, (β) επιλέγεται ο οπλισμός που θα τοποθετηθεί, (γ) βάσει αυτού του οπλισμού υπολογίζεται η καμπυλότητα σε αστοχία και στη συνέχεια η καμπυλότητα σε διαρροή και εν τέλει προκύπτει η πλαστιμότητα καμπυλοτήτων.
- Στη διαστασιολόγηση σε αστοχία υπάρχει μία εκτεταμένη περιοχή θλιπτικών αξονικών δυνάμεων που ανεξαρτήτως της δρώσας ροπής, η καμπυλότητα είναι σταθερή. Σε κάθε αξονική δύναμη, ο αναγκαίος οπλισμός κάμψης προκύπτει από τη δρώσα ροπή βάσει μίας πρωτοβάθμιας εξίσωσης.

## ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Καραγιάννης ΧΓ. Σχεδιασμός Κατασκευών από Οπλισμένο Σκυρόδεμα και Σεισμικές Δράσεις. Κεφάλαιο 8 - Πλαστιμότητα Στοιχείων. Εκδόσεις Σοφία 2019; ISBN 978-960-633-005-6.
2. Κωνσταντινίδης Α. Αντισεισμικά Κτίρια από Οπλισμένο Σκυρόδεμα: Η Τέχνη της Κατασκευής και η Μελέτη Εφαρμογής σύμφωνα με τους Ευρωκώδικες. Τόμος Α, *Alta Grafico SA*, 2009; ISBN: 978-960-85506-5-0.
3. Κωνσταντινίδης Α, Μπέλλος Ι. Αντισεισμικά Κτίρια από Οπλισμένο Σκυρόδεμα: Στατική και Δυναμική Ανάλυση σύμφωνα με τους Ευρωκώδικες. Τόμος Β, *Alta Grafico SA*, 2012; ISBN: 978-960-85506-0-5.
4. Ευρωκώδικας 2: Σχεδιασμός Φορέων από Σκυρόδεμα. Μέρος 1-1: Γενικοί Κανόνες και Κανόνες για Κτίρια. EN 1992-1-1: 2004.
5. Ευρωκώδικας 8 : Αντισεισμικός Σχεδιασμός. Μέρος 1: Γενικοί κανόνες, σεισμικές δράσεις και κανόνες για κτίρια. EN 1998-1: 2004.